Механикадағы ұқсастық әдістері және өлшем бірліктер 7M05405-Механика және энергетика Дәріс 9 Қысқа конспект 9

**9-дәріс. Механикалық жүйелердің ұқсастылық теориясы**

Механикалық жүйелердің ұқсастылық теориясы екі геометриялық ұқсас құрылымдардың жұмыс жасау шарттарын салыстырудың тәжірибелік сұрағынан туындады. Механикалық ұқсастық туралы негізгі теореманы Ньютон өзінің "Табиғи философияның математикалық принциптерінде" келтірілген, онда осы теорема негізінде сұйықтықтың ондағы қозғалатын денелерге кедергі заңы алынады.

$A\_{1}, A\_{2 },…, A\_{n} және A\_{1}^{'}, A\_{2}^{'}, …, A\_{n}^{'} $ екі нүктелер жүйесі ***геометриялық ұқсас*** деп аталады, егер осы жүйелердің нүктелері арасында өзара біржақты сәйкестікті, сәйкес келетін сызықтар әрқашан тұрақты қатынаста орнатуға болатындай, келесідей

$\frac{ A\_{i}A\_{j}}{A\_{i}^{'}A\_{j}^{'}}=λ$ $i, j=1, 2, …, n$

Егер $A\_{1}, A\_{2 },…, A\_{n}$ және $A\_{1}^{'}, A\_{2}^{'}, …, A\_{n}^{'} $екі геометриялық ұқсас жүйелер нүктелері массалармен жабдықталған болса, (яғни, материалдық нүктелер болады) және егер сәйкес нүктелердің массалары $m\_{1}, m\_{2 },…, m\_{n}$ және $m\_{1}^{'}, m\_{2}^{'}, …, m\_{n}^{'} $ болса, тұрақты қатынаста болады, яғни

$\frac{m\_{i}}{m\_{i}^{'}}=μ,$ $i=1, 2, …, n$

мұндай материалдық нүктелер жүйелері – ***материалдық ұқсас***, деп аталады.

Екі нүкте жүйесінің ($S$) және ($S^{'}$) геометриялық ұқсастығын, кез-келген *t* моментіндегі ($S) $жүйенің конфигурациясын ($S^{'}$) жүйенің конфигурациясымен басқа $t^{'}$ (атап айтқанда $t=t^{'}$) моментінде салыстыру арқылы орнатуға болады; бұл моменттерді ***сәйкес моменттер***, деп атаймыз. Егер дербес жағдайда ($S$) және ($S^{'}$) жүйелері өзгеруге келмейтін болса, онда *t* және $t^{'}$тиісті моменттері үшін орнатылған осы жүйелердің геометриялық ұқсастығы (атап айтқанда, бір момент үшін) барлық уақытта сақталады, яғни екі өзгеруге келмейтін жүйенің геометриялық ұқсастығы бұзылмайды.

Екі нүктелік жүйенің ($S$) және ($S^{'}$) кинематикалық ұқсастығын анықтау үшін *O* санақ жүйесіне қатысты ($S$) жүйенің қозғалысын қарастырайық және $O^{'}$ санақ жүйесіне қатысты ($S^{'}$) жүйенің қозғалысын қарастырайық, сонымен қатар *O* және $O^{'}$ санақ жүйелері Ω бас санақ жүйесіне қатысты қозғалмайды; онда *(S) O*-мен бірге ($S^{'}$) $O^{'}$ -мен бірге уақыт өзгеруіне қатысты өзгеретін фигуралар, оларды жаңа нүктелік жүйелер ($OS$) және ($O^{'}S^{'}$) деп санауға болады.

Егер t және $t^{'}$ сәйкес моменттердің үзілісссіз тізбегін орнатуға болатын болса (бірдей бастапқы моменттен бастап есептелетін), олар үшін ($OS$) және ($O^{'}S^{'}$) жүйелері геометриялық уақыт ұқсастық қатынасы $λ$ тұрақтысынан тәуелсіз болатын, ал сәйкес моменттер бір-бірімен келесі қатынас арқылы байланысқан

$t=τt^{'},$ (1.68)

егер $τ$ тұрақты болса, онда қозғалататын *(S)* және ($S^{'}$) жүйелер ***кинематикалық ұқсас***, деп аталады.

Екі жүйенің *(S)* және ($S^{'}$) кинематикалық ұқсастығының анықтамасынан алынған салдар:

 1) Кинематикалық ұқсас екі жүйенің сәйкес нүктелерінің траекториялары, қозғалатын жүйелердің уақыт моменттеріне сәйкес геометриялық ұқсастығының қатынасы, ұқсастық λ қатынасына геометриялық ұқсас.

Шынында да, *(S)* жүйесінің кез келген $ A\_{i}^{}$ нүктесінің $O$ жүйеге қатысты t моментіндегі координаттары $x\_{i}, y\_{i}, z\_{i}$ болсын, ал сәйкес нүктенің координаттары $A\_{i}^{'} $ ұқсас кинематикалық ұқсас ($S^{'}$) жүйенің санақ жүйесіне $O^{'}$ қатысты сәйкес $t^{'}$ моментіндегі координаттары $x\_{i}^{'}, y\_{i}^{'}, z\_{i}^{'}$ болады, сонымен қатар, жүйелер *(OS)* және ($O^{'}S^{'}$) жүйелері сәйкес уақыт моменттерінде, анықтамаға сәйкес, геометриялық ұқсас болады

$\left(t\right)=λx\_{i}^{'}\left(t^{'}\right), y\_{i}\left(t\right)=λy\_{i}^{'}\left(t^{'}\right), z\_{i}\left(t\right)=λz\_{i}^{'}\left(t^{'}\right)$$(i=1, 2, …, n)$(1.69)

кез-келген сәйкес екі момент үшін $t$ және $t^{'}$. Демек, сәйкес $A$ және $A^{'}$ нүктелерінің траекториялары геометриялық ұқсас болады. Бұдан *(S)* жүйе нүктелерінің траекторияларының жиынтығынан тұратын фигура, сәйкес нүктелер траекторияларынан тұратын геометриялық фигураға ұқсас болады ($S^{'}$).

2) уақыттың сәйкес моменттерінде екі кинематикалық ұқсас жүйенің ($S$) және ($S^{'}$) сәйкес нүктелерінің жылдамдық модульдері әрдайым $λτ^{-1}$ тұрақты қатынаста болады, ал үдеу модульдері $λτ^{-2}$ тұрақты қатынасында болады, ал әр түрлі уақыт моменттері үшін осы нүктелердің жылдамдық векторлары мен үдеулер жүйелері геометриялық ұқсас фигураларды құрайды (әрине, масштабтары бірдей құрылымдар үшін).

Бұл теңдіктерді (1.69) *t*-ге бір және екі рет дифференциалдау арқылы және (1.68) негізге алу арқылы оңай қол жеткізуге болады

$ dt=τdt^{'}. $(1.70)

Алатынымыз

$$\frac{dx\_{i}}{dt}=λ\frac{dx\_{i}^{'}}{dt^{'}}\frac{dt^{'}}{dt}=λτ^{-1}\frac{dx\_{i}^{'}}{dt^{'}}$$

 немесе $v\_{ix}= λτ^{-1}v\_{ix}^{'}$ және т.с. (1.71)

$\frac{d^{2}x\_{i}}{dt^{2}}=λτ^{-1}\frac{d^{2}x\_{i}^{'}}{dt^{'2}}\frac{dt^{'}}{dt}=λτ^{-2}\frac{d^{2}x\_{i}^{'}}{dt^{'2}}$ немесе

$ ω\_{ix}= λτ^{-2}ω\_{ix}^{'}$ және т.с. ($i=1, 2, …, n$). (1.72)

Келесі (1.71) және (1.72) теңдіктерден, $O$ және $O^{'} координаталық осьтер $жүйелерінің сәйкес нүктелердің жылдамдық мен үдеу проекциялары сәйкес моменттерде, әрдайым тұрақты қатынаста болатындығын байқауға болады, демек жылдамдық пен үдеу модульдері де осындай қатынаста, ал жылдамдық пен үдеу векторлары сәйкес траекторияларға бірдей бағытталған.

Егер $(S)$ және $(S^{'}) $екі жүйе кинематикалық және материалдық жағынан өзара ұқсас болса, онда мұндай жүйелер ***механикалық ұқсас*** деп аталады. Мұндай механикалық ұқсас жүйелер үшін, олардың кинематикалық ұқсастығының салдарынан, сәйкес бөлшектер мен моменттер үшін

$ω\_{i}=λτ^{-2}ω\_{i}^{'}$ $\left(i=1, 2, …, n\right), $ (1.73)

ал материалдық ұқсастыққа салдарынан

$m\_{i}=μm\_{i}^{'}$ $(i=1, 2, …, n)$. (1.74)

(1.73) және (1.74) индекстері бірдей теңдіктерді көбейтіп, алатынымыз

$m\_{i}ω\_{i}=λτ^{-2}μ∙m\_{i}^{'}ω\_{i}^{'}$ $\left(i=1, 2, …, n\right).$ (1.75)

Келесі жағдайды ескере отырып,

$m\_{i}ω\_{i}=F\_{i , } m\_{i}^{'}ω\_{i}^{'}=F\_{i}^{'}$ $(i=1, 2, …, n)$, (1.76)

мұндағы $F\_{i }$және $F\_{i}^{'}$ сәйкес моменттер үшін екі механикалық ұқсас жүйелердің сәйкес бөлшектеріне әсер ететін күштер модульдерінің мағынасы (1.75)

$F\_{i }=φF\_{i}^{'}$$(i=1, 2, …, n)$*,* (1.77)

мұнда

 $φ=λτ^{-2}μ$ (1.78)

тұрақты сан бар. Сонымен, механикалық ұқсас жүйелерде уақыттың сәйкес моменттерінде сәйкес ұзындықтар, жылдамдықтар, үдеулер мен күштердің модульдері $λ, λτ^{-1}, λτ^{-2}, λτ^{-2}μ$ тең әрдайым тұрақты қатынастарда болады; сонымен қатар, күштердің векторлары, үдеулер сияқты бірдей бағытталған